Katarzyna Wrońska
klasa 2 Technikum Weterynaryjnego
Zespół Szkół Informatycznych
ul. Koszalińska 9, 76-200 Słupsk
tel.: 59 845 60 70

Opiekun pracy: Agnieszka Kałuża-Horbaczewska

Z matematyką na wakacje

Z matematyką na wakacje - o zastosowaniu grafów

Kontrowersyjna dziedzina

Matematyka jest nauką, która przysparza więcej kontrowersji niż inne dziedziny. Nie można jej porównać do innego ścisłego przedmiotu, który jest nauczany w szkołach od wielu lat. Jednakże oprócz nauk humanistycznych, reszta jest w mniejszym bądź większym stopniu związana z matematyką.

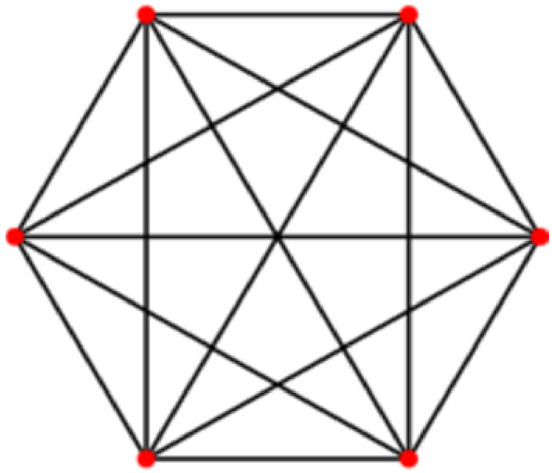
Biolodzy obliczają średnią ilość osobników na dany obszar, chemicy szukają wag mikroskopijnych cząsteczek krążących w powietrzu, fizycy ścigają się ze światłem.

Matematykę można albo polubić, albo po prostu ją przetrwać. Jednej rzeczy nie można zrobić: ominąć jej. Na każdym kroku znajdujemy zastosowania ciągów liczbowych, bezwiednie wyliczamy prawdopodobieństwo, czy szukamy trasy, która zajmie nam najmniej czasu.
Czy to nie znaczy, że łączymy z naszym życiem zagadnienia matematyczne?

Warto zauważyć, że matematyka nie ogranicza się jedynie do liczb czy wytycznych, które musimy oszacować na kalkulatorze. Ta nauka może nam pozwolić odkryć rzeczy, które ułatwiają codzienne życie. Dla wielu ludzi zaskoczeniem będzie, gdy dowiedzą się, że codziennie w drodze do szkoły, pracy lub podczas wakacyjnych wypraw używają czegoś, co nazywane jest **grafami**.

Grafy

Graf – to podstawowy obiekt służący do rozpatrzenia teorii oraz struktura matematyczna służąca do przedstawienia i badania relacji między obiektami.
Graf jest więc zbiorem wierzchołków, które są połączone krawędziami tworząc w ten sposób jakąś figurę.

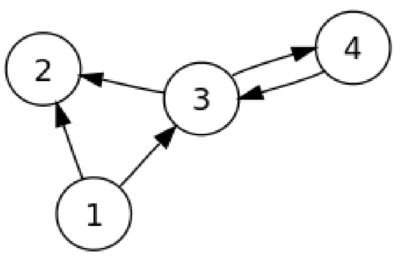


Zastosowanie

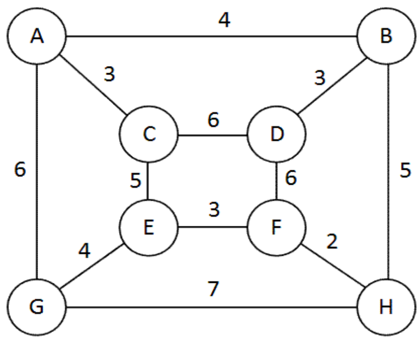
Istnieje wiele różnorodnych zastosowań grafów począwszy od użycia ich w architekturze skończywszy na programach komputerowych. Grafy przychodzą z pomocą w rozwiązywaniu wielu problemów dotyczących współczesnego świata, np.: planowanie rozkładu ulic, ustalanie budowy rur kanalizacyjnych lub przewodów światłowodowych oraz rozkład sieci pomieszczeń i korytarzy w budynkach. Oprócz takich typowych zastosowań grafy wykorzystuje się także jako graficzny sposób przedstawienia planu działania w formie obrazu *(ten sposób przedstawienia informacji jest znacznie lepiej przyswajalny przez społeczeństwo niż w formie werbalnej)*. Właśnie z powodu różnorakich potrzeb wykorzystania pojęcia „grafu", nastąpiła eskalacja form i zasad.

Kilka form (przykładów) grafów:

- **graf skierowany** – krawędzie wyznaczają kierunek (zastosowanie: biznes plan firmy międzynarodowej; cyfry [1-4] to kraje, a krawędzie pokazują kierunki eksportu surowca)



- **graf z wagą** – zapisane przy krawędziach liczby wskazują na odległość, która dzieli od siebie dane wierzchołki (zastosowanie: planowanie budowy domków letniskowych / plan wycieczki)



Początki grafów

Za pierwszego teoretyka i twórcę grafów uważa się Leonarda Eulera, szwajcarskiego matematyka i fizyka, który zasłynął po rozstrzygnięciu zagadnienia mostów w Królewcu. Zastanawiało go, czy przez siedem kolejnych mostów (1 łączył obie wyspy, pozostałe 6 łączyły wyspy z brzegami rzeki) można przejść, tak aby każdy przekroczyć tylko jeden raz. Pytanie to niezwykle zaintrygowało osiemnastowiecznego matematyka, który postanowił rozwiązać powyższe zagadnienie.

Po przeprowadzonych badaniach (które były niejako doświadczeniami) Euler wykazał, że przekroczenie każdego mostu tylko raz, przy założeniu, że chce się przejść przez wszystkie, jest niemożliwe. Powodem, dla którego działanie to było niewykonalne stanowi fakt, że istniała nieparzysta liczba wylotów mostów na każdą z wysp oraz na oba brzegi rzeki.

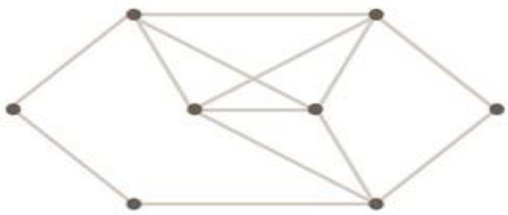
Euler nie zakończył swoich rozważań na temat grafów na rozwiązaniu zagadki mostów. Matematyk posunął się o krok dalej w swoich badaniach i stworzył założenie, które charakteryzuje graf Eulera [*więcej w punkcie 1*].

Graf Hamiltona i Eulera

1. Graf Eulera

Graf Eulera – charakterystyczna dla tego grafu jest możliwość stworzenia cyklu, w którym przez każdą krawędź można przejść tylko raz, wracając do punktu wyjścia. Twórca tego grafu (Euler) stwierdził, że aby możliwe było stworzenie takiego cyklu musi zostać spełniony poniższy warunek:

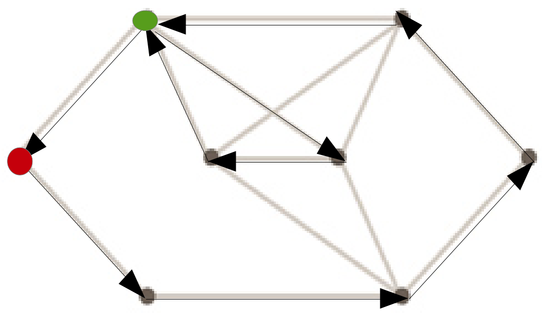
* każdy wierzchołek grafu musi posiadać parzysty stopień (oprócz maksymalnie dwóch).



Aby zrozumieć zasadę tworzenia takiego grafu warto zwrócić uwagę na jego kształt (*powyżej*).

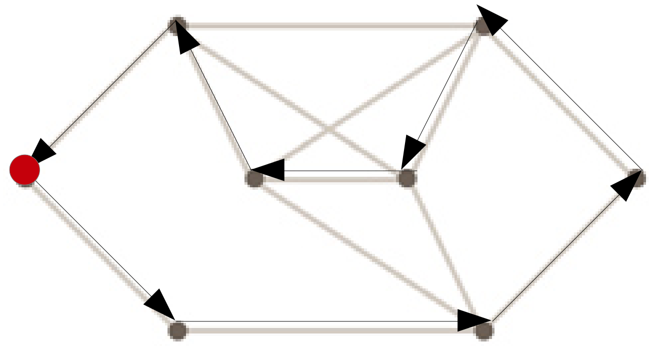
Można z łatwością można zauważyć, że każdy wierzchołek posiada parzysty stopień, czyli każdy wierzchołek łączy się z parzystą liczbą krawędzi.

Skoro znamy już zasadę tworzenia grafu Eulera, warto zobaczyć „na własne oczy", jak wygląda tworzenie takiego cyklu:



gdzie czerwona kropka oznacza początek, a strzałki wskazują kierunek przemieszczania się. Kropka zielona została wskazana przeze mnie nie bez powodu. Zgodnie z definicją grafu Eulera to krawędzie są tą częścią grafu, przez które nie możemy przechodzić więcej niż jeden raz. Wierzchołek nie narzuca nam takich ograniczeń.

Graf mógłby zostać skonstruowany w znacznie prostszy sposób, jednakże nie pozwoliłoby nam to udowodnić, że w wierzchołku możemy pojawić się więcej niż jeden raz :

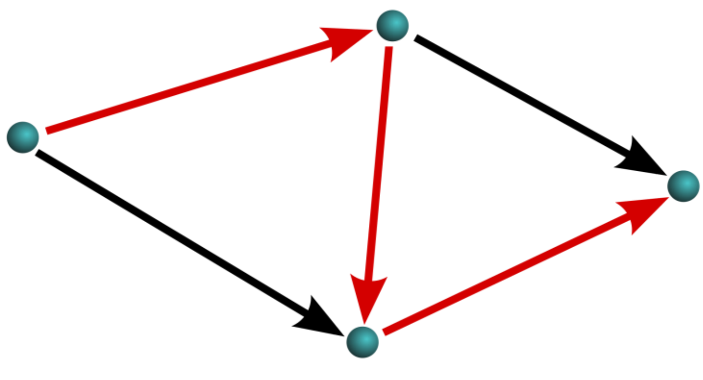


Powyższy graf również spełnia założenia grafu Eulera, jednakże nie wyróżnia się niczym szczególnym. *(Co więcej jest dość podobny do grafu Hamiltona, który postaram się opisać w kolejnym punkcie.)* Warto więc postarać się, aby cykl Eulera był tworzony właśnie z chociaż jednym wierzchołkiem, przez który trzeba by przejść więcej niż raz.

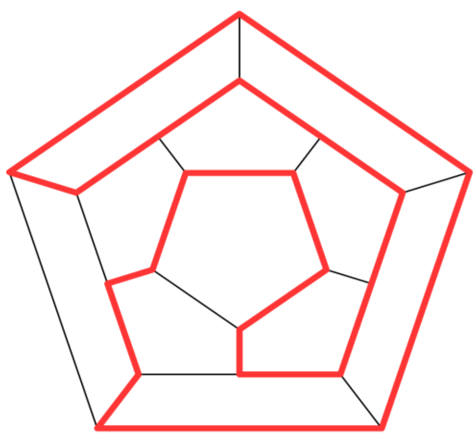
2. Graf Hamiltona

Graf Hamiltona – rozważany w teorii grafów jako ścieżka (jeżeli nie wracamy do punktu wyjścia), która przechodzi przez każdy wierzchołek jedynie raz.
Grafem hamiltonowskim jest:

a) każdy graf pełny, czyli posiadający przynajmniej trzy wierzchołki,



b) każdy graf opisujący wielościan foremny.



Graf Hamiltona można traktować dwojako:
1) ścieżka (tzw. graf półhamiltonowski) – wtedy nie wracamy do punktu wyjścia
2) cykl – jest to „ścieżka zamknięta”, a więc taka, gdy wracamy do punktu wyjścia.

3. Zastosowania cyklu Eulera i Hamiltona

Grafy Eulera i Hamiltona mają wiele zastosowań, jednak chciałabym skupić się w szczególności na jednym z nich, który dotyczy tematu opisywanego przez mnie założenia. Okres wakacji, lub urlopu, to często czas, gdy planujemy wycieczki. Doszukujemy się informacji o miejscach wartych poznania i zabytkach, które bezsprzecznie należałoby zwiedzić. Często nie zdając sobie z tego sprawy, zbyt mocno komplikujemy swoje życie, próbując nakreślić idealny scenariusz „planu dnia”. A wystarczyłoby sięgnąć po coś tak prostego i przede wszystkim pomocnego jak grafy. Chciałabym wskazać zasadnicze różnice między zastosowaniem kolejnych grafów. Aby to zrobić pokrótce przypomnę ich charakterystykę:

* graf Eulera – przez daną krawędź możemy przejść tylko raz, ale nie dotyczy to wierzchołków;

* graf Hamiltona – przez każdy wierzchołek przechodzimy tylko i wyłącznie jeden raz, szukamy także najkrótszej możliwej drogi.

A więc przedstawię zalety obydwu grafów (niezależnie, czy jest to cykl czy ścieżka):

Graf Eulera	Graf Hamiltona
- pojawienie się w wybranym miejscu więcej niż jeden raz	- stworzenie jak najkrótszych tras między wierzchołkami
- możliwość podróżowania bez „chodzenia w ta i z powrotem” po jednej drodze	- niemożność powrotu do wierzchołka (za wyjątkiem miejsca „startu” w cyklu)
- przy spacerze w górach/lasach/parkach, gdzie to raczej ścieżki są godne zapamiętania, mamy większy ich wybór	- łatwość tworzenia cyklu/ścieżki (nie trzeba tworzyć wierzchołków o stopniu parzystym, wystarczą dwie drogi: „od” i „do”)
- mimo niewielu punktów odniesienia (wierzchołków) można stworzyć ciekawą trasę, nawet jeśli łączy się to z wielokrotnym wracaniem w jedno miejsce	- szczególnie przydatny przy tworzeniu planów wycieczek w miastach lub terenach, gdzie interesują nas konkretne punkty, nie podziwiamy trasy (np.: wycieczka po mieście ze

- stworzenie kilku alternatywnych tras z jednym punktem odniesienia (np.: kilka tras dla biegaczy zależnie od stopnia ich wytrzymałości, przy czym wszyscy spotykają się w określonym „wierzchołku” i mogą kontynuować bieg wspólnie)	zwiedzaniem zabytków)

W powyższej tabeli postanowiłam skonfrontować dwa grafy, aby pokazać ich „wakacyjne” zastosowania. Graf Eulera ze względu na swoją zaletę (lub wadę, w zależności od punku widzenia), a mianowicie: możliwość pojawienia się dwa razy w wierzchołku, pozwala nam na stworzenie trasy spacerowej w parku narodowym, lesie czy w górach. Znając szlaki turystyczne (krawędzie) oraz szczyty górskie / leśne polany / miejsca biwakowe (wierzchołki) możemy stworzyć trasę, która będzie zapewniać przejście jak największej długości trasy. Podczas wypraw na łono natury to właśnie godziny chodzenia są tym, co liczy się najbardziej. Miejsca spotkań powinny stanowić tylko nieodzowny element naszej trasy, wskaźniki, gdzie się kierować oraz którędy iść.

Jednakże to właśnie graf Hamiltona jest tym, który przyciąga moją uwagę i będzie pomocny w pisaniu kolejnej części pracy. W tabeli możemy przeczytać, że jest „szczególnie przydatny przy tworzeniu planów wycieczek w miastach lub terenach, gdzie interesują nas konkretne punkty”. Mianowicie w miastach, jeżeli decydujemy się na ich zwiedzanie, turystów interesują przede wszystkim zabytki lub jakieś konkretne punkty jak bary czy restauracje. To one są naszymi „wierzchołkami”, a ulice, którymi będziemy się poruszać, aby do nich dojść to nasze „krawędzie”.

4. Cylk Hamiltona w Słupsku

Jak już wcześniej wspomniałam, graf Hamiltona byłby idealny, jeśli chodzi o tworzenie tras turystycznych w miastach. Dodatkowo sam fakt tworzenia cyklu ułatwia nam zaplanowanie wycieczki z punktem wyjścia i powrotu w tym samym miejscu.

Słupsk

Ze względu na to, że pochodzę i mieszkam w Słupsku, postanowiłam dzięki cyklowi Hamiltona, przedstawić proponowaną trasę wycieczki dla turystów, którzy chcieliby zwiedzić to miasto. Najpierw postaram się przedstawić położenie Słupska oraz jego krótką charakterystykę.

Słupsk to miasto leżące na Pomorzu, ok.18km od morza. Stanowi on siedzibę powiatu słupskiego oraz gminy Słupsk. Leży w centrum atrakcyjnego turystycznie regionu, a pobliskie miejscowości wypoczynkowe (głównie kurorty nadmorskie) dysponują bogatą ofertą turystyczno-kulturalną. Największymi walorami regionu są wybrzeże morskie i liczne jeziora otoczone lasami (ok.40% powierzchni regionu) oraz Słowiński Park Narodowy – rezerwat biosfery UNESCO. Park Krajobrazowy „Dolina Słupi" jest idealnym miejscem do wypoczynku z całą rodziną.

Oprócz przyrodniczych walorów turystycznych, Słupsk posiada liczne i piękne zabytki. Dzięki tym wszystkim zaletom, miasto, w którym mieszkam, znane było kiedyś pod nazwą „perełka północy". Planując wycieczkę po okolicach Słupska i nadmorskich kurortach, warto wziąć pod uwagę, aby jeden dzień poświęcić na zwiedzenie chociaż części miasta. Pozwoli to na poznanie jego historii, obejrzenie zabytków i przejście głównymi ulicami.

Wycieczka

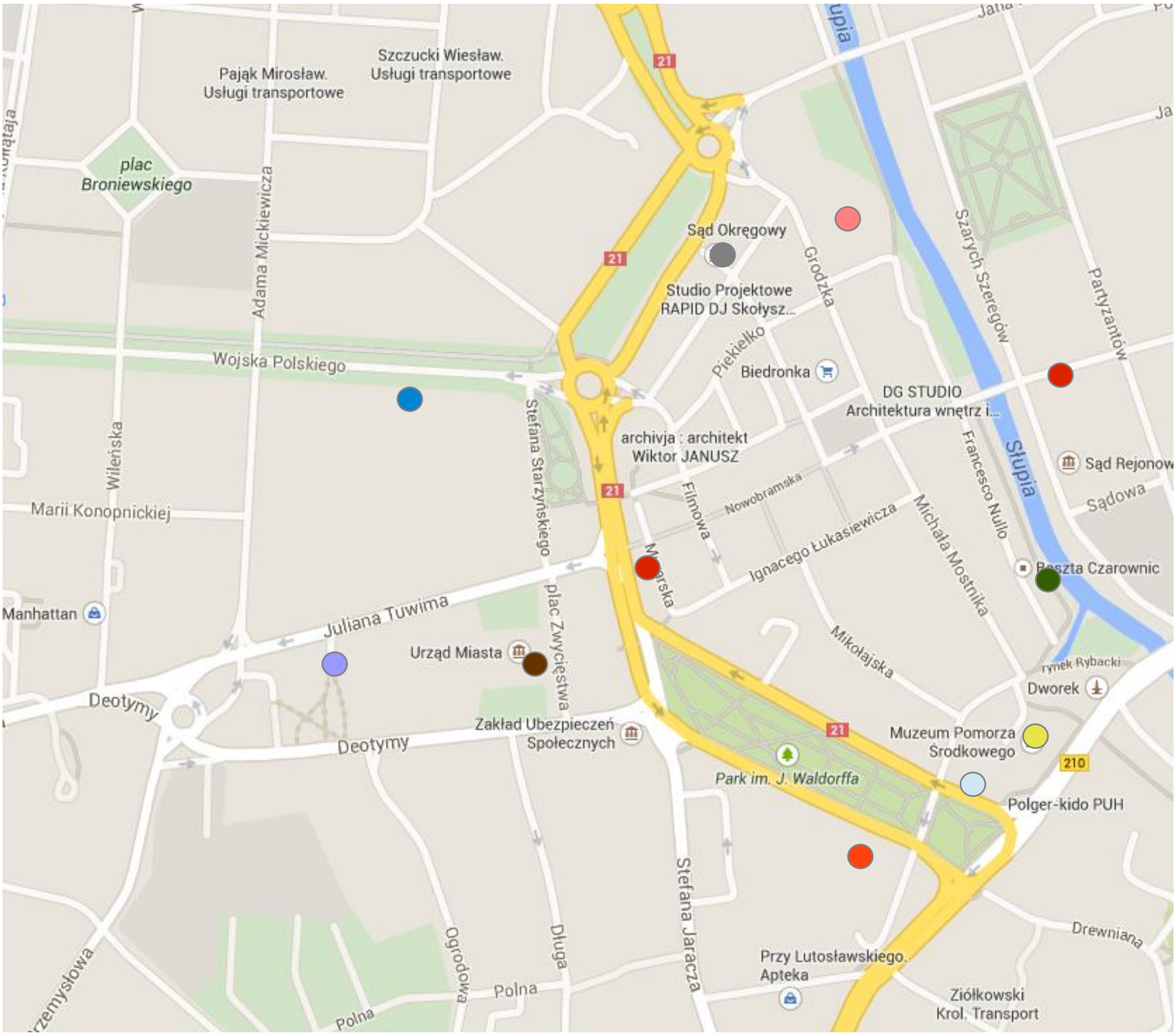
Na potrzeby mojej pracy wcielę się w postać przewodnika turystycznego-matematyka, który zaplanuje wycieczkę dla grupy turystów. Aby wycieczka była przyjemna i przede wszystkim niewymagająca „kręcenia się w kółko", postanowiłam wykorzystać cykl Hamiltona, który ułatwi mi pracę nad wytyczeniem trasy.
Jako przewodnik założyłam, że turyści będą zainteresowani zwiedzeniem części zabytków, ponieważ odwiedzenie wszystkich miejsc wiązałoby się z koniecznością ciągłego marszu bez możliwości zatrzymania się. Zabytki, które wybrałam, jako warte odwiedzenia to:

- Baszta Czarownic oraz mury obronne
- kościół św. Jacka
- Muzeum Pomorza Środkowego (Zamek Książąt Pomorskich)
- kościół Najświętszej Maryi Panny
- Nowy Teatr
- Ratusz
- Nowa Brama
- Miejska Biblioteka Publiczna

Założyłam również, że turyści mogą być w różnym wieku i postanowiłam dodać kilka innych atrakcji:

- zakupy w Galerii Słupskiej
- przerwa w pizzerii „Pod Kasztanem"
- odwiedzenie Sądu Okręgowego
- Starostwo Powiatowe

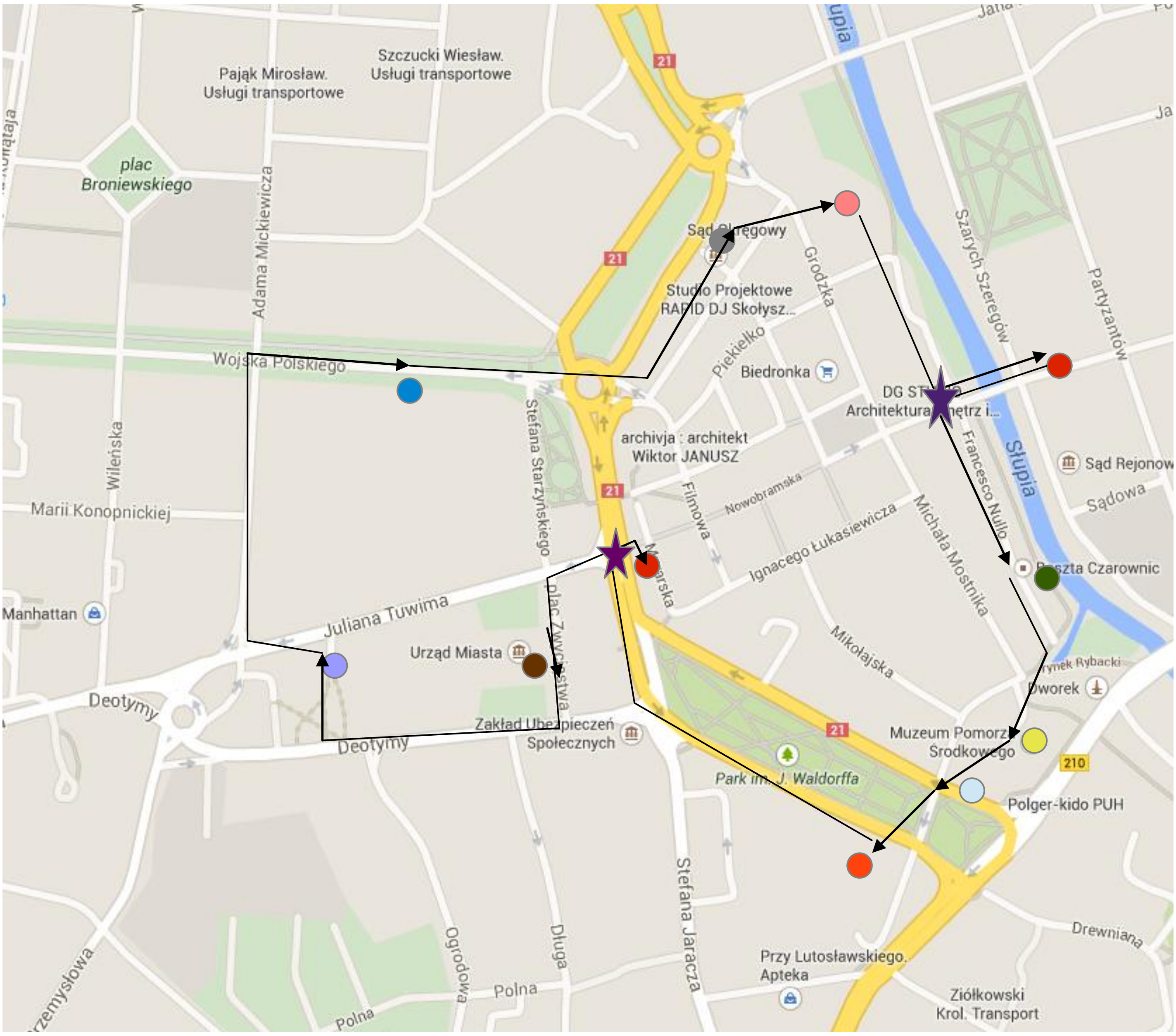
Wszystkie miejsca zaznaczyłam na mapie Słupska poniżej:
* kolory wskazują konkretne miejsca,
* czerwony kolor pozostawiłam dla punktów, których nie będziemy mogli odwiedzić (*więcej w dalszej części*).



Na mapie zaznaczone zostały zaznaczone wszystkie miejsca, które jako przewodnik wycieczki postanowiłam przedstawić. Wcześniej zaznaczyłam wyraźnie, że punktów oznaczonych czerwonymi kropkami nie będziemy mogli odwiedzić.
Zanim jednak przejdę do dalszych wyjaśnień i wniosków chciałabym zaznaczyć, że od teraz będę zamiennie stosować nazwy „punkt" i „wierzchołek", ponieważ stwierdzenia te będą się stale przeplatały i chciałabym uniknąć niepotrzebnych, ciągłych powtórzeń jednego wyrazu.

Plan wycieczki

Zgodnie z moimi założeniami, aby wycieczka turystyczna po zabytkach (oraz innych miejscach) Słupska opierała się na cyklu Hamiltona, sprawdziłam czy byłoby możliwe połączenie wszystkich zaznaczonych przeze mnie punktów w jeden ciąg, nie pojawiając się dwa razy w tym samym miejscu. Dodatkowym utrudnieniem, był układ ulic, który musiałam wziąć pod uwagę. Dlatego też tworzenie cyklu Hamiltona wymaga większego skupienia, jeśli chcę stworzyć realną trasę.

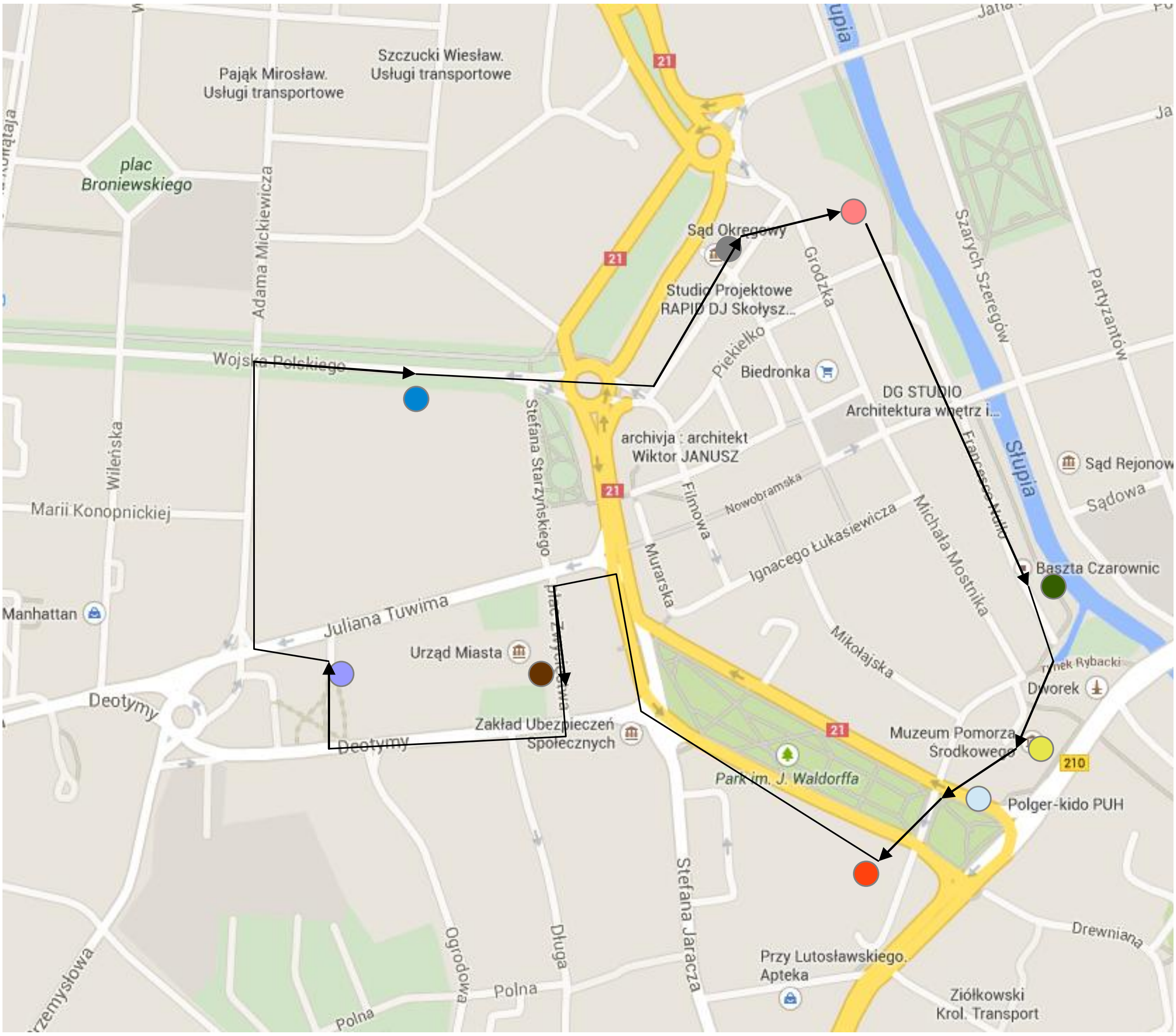


Na powyższym planie, oprócz naniesionych poprzednim razem punktów, czyli wierzchołków naszego grafu, można dostrzec kolejne zmiany:

- **strzałki** → są one krawędziami grafu oraz wskazują kierunek trasy *(przyp.: graf skierowany*)

- **ciemnofioletowe gwiazdy** → wskazują na miejsca, w których pojawilibyśmy się więcej niż raz, a to zaprzecza teorii grafu Hamiltona.

Wyjaśnia się teraz, dlaczego zarówno Nową Bramę, która znajduje się na ul. Murarskiej, jak i Starostwo Powiatowe (za rzeką) „spisałam na starty" już na samym początku. Przewodnik-matematyk, w którego się wcieliłam, nie mógł nagiąć jakichkolwiek zasad dotyczących matematyki (w tym przypadku dokładnie zasady tworzenia cyklu Hamiltona), więc postanowiłam zmienić nieco wygląd trasy pozbywając się dwóch punktów, które będą kolidować z moimi planami. Usuwając Nową Bramę i Starostwo Powiatowe z mapy otrzymam następującą trasę:



Na powyższej mapie punkty, które zaznaczyłam (wszystkie miejsca, które zamierzam wraz z turystami odwiedzić) odwiedzimy jedynie raz. Spełniamy więc założenie grafu Hamiltona, a mianowicie: „ścieżka (jeżeli nie wracamy do punktu wyjścia), która przechodzi przez każdy wierzchołek jedynie raz" [*cyt. z punktu 2 „Graf Hamiltona"*].

Od tej pory możemy mówić o stworzeniu grafu Hamiltona. Teraz musimy stwierdzić, czy jest to ścieżka, czy cykl (czyli ścieżka zamknięta). Przyjmując, że początek wycieczki ma miejsce przy Baszcie Czarownic, można łatwo zauważyć, że na koniec wracamy do punktu wyjścia. Tak więc tworzymy cykl. Co więcej możemy tu mówić o nakreśleniu figury geometrycznej, którą jest w tym przypadku wielokąt.

PODSUMOWANIE

Grafy

W książce pt.: „Wprowadzenie do teorii grafów” R.J. Wilsona, można dostrzec potencjał, jaki kryje się w cyklach i ścieżkach. Grafy, na których skupiłam swoją uwagę, stanowią tylko niewielką część z całej teorii, jednakże grafy Eulera i Hamilona wystarczyły, by pokazać różnice, które zawiera każdy graf z osobna. Ich zastosowania mogą być na pierwszy rzut oka podobne.
Na początku wymieniłam różne sposoby wykorzystania grafów, ale były to stwierdzenia ogólne, których potrzebowałam, aby móc ze zrozumieniem wyjaśnić bardziej skomplikowane kwestie poszczególnych, interesujących mnie, grafów. Nie można ogólnikowo stwierdzić, że każdy graf nadaje się do tworzenia sieci układów dróg i ulic, albo (*jak wykazałam powyżej*) nakreślania trasy wycieczki miejskiej.

Graf Hamiltona zainteresował mnie nie tylko z powodu pisanej przez mnie pracy, ale również z powodu jednego niepodważalnego faktu, który pozwolę sobie stwierdzić.
A mianowicie: grafu Hamiltonowego używamy każdego dnia. Najczęściej wykorzystujemy go w postaci cyklu, planując wyjście na zakupy, do fryzjera i z powrotem do domu. Wszystkie punkty, które chcemy odwiedzić możemy śmiało potraktować jako wierzchołki grafu, a gdybyśmy malowali za sobą ślad, to utworzylibyśmy krawędzie jakiejś przedziwnej figury.

Odkrywając coraz to nowe zastosowania grafu Hamiltona w codziennym życiu, postępuję o krok dalej w moich spekulacjach. Skoro coś tak, chciałoby się rzec, niespotykanego jest właściwie codziennością w naszym życiu, to czy inne dziedziny matematyki również wykorzystujemy nieświadomie? Jak wiele matematycznej wiedzy jest w stanie pochłonąć nasz mózg, nie informując nas o tym? Myślę, że na to i wiele innych pytań nie możemy oczekiwać jednej i wyraźnej odpowiedzi. Ale dzięki cyklowi Hamiltona w codziennym życiu, jestem w stanie udowodnić, że nasz mózg codziennie chłodno kalkuluje każdy stawiany przez nas krok.

O matematyce

Wspomniałam wcześniej, że matematyka jest dziedziną niezwykle kontrowersyjną. Nauka ta jest niezwykle logiczna, ale dla wielu niezrozumiała, ponieważ jest nienamacalna. O ile jesteśmy w stanie udowodnić, że $2 + 2 = 4$ (weź po dwa liście do każdej ręki → dowód), to stwierdzenie, że $\sqrt{4} = 2$ lub -2 musimy przyjąć bez żadnego dowodu.
Co więcej w matematyce dopuszcza się dowolność myślenia, ale nie toleruje się błędów. Są one automatycznie usuwane z każdej pracy przez sprawnego nauczyciela matematyki, który szybko rozgryzie nielogiczny tok myślenia typowego ucznia. Skoro więc błędy są niedopuszczalne, dlaczego stworzono coś co nazywane jest błędem względnym i bezwzględnym? Dlaczego

w matematyce „idą obok siebie" stwierdzenia, które zgodnie z ludzkim tokiem rozumowania, wykluczają się?

Myślę, że właśnie te kontrowersje oraz fakt jak wiele można rozwiązać za pomocą chłodnych kalkulacji, sprawiają, że matematyków jest z każdą chwilą coraz więcej. Nawet ci, którzy z początku traktowali tę dziedzinę nauki, jako dostępną tylko dla umysłów ścisłych, muszą przyznać, że nie ma bardziej logicznej dziedziny niż właśnie matematyka.

Załącznik

Wycieczka

1. Baszta Czarownic

Powstała około roku 1410 wraz z murami obronnymi. Ułożona na planie wysuniętego półkola, ma stożkowy, ścięty dach i nieliczne małe okienka w ścianach.
W XVII w. basztę tą przebudowano na cele więzienne i przetrzymywano tu kobiety posądzone o czary (stąd nazwa). Ostatnia „czarownica", jaka miała „przyjemność" przebywać w tym więzieniu to Trina Papisten, która zginęła na stosie w 1701r.
Obecnie Baszta Czarownic jest zaadoptowana jako galeria; można zobaczyć wystawy obrazów. Charakterystycznym elementem jest czarownica na miotle na dachu.

2. Kościół św. Jacka

Przebudowany barokowy kościół, którego najważniejszym elementem są bogato zdobione, barokowe organy.

3. Zamek Książąt Pomorskich (Muzeum Pomorza Środkowego)

Na Muzeum składa się kompleks: Zamek, spichlerz Richtera (herbaciarnia), Młyn Zamkowy oraz Brama Młyńska.

W zamku można podziwiać największą na świecie wystawę obrazów Witkacego.

4. Kościół Najświętszej Maryi Panny (NMP)

Wybudowany około roku 288, podczas II wojny światowej uległ ogromnym zniszczeniom. Udało się go odbudować, ale wieżę odrestaurowano dopiero w 2004 roku.

5. Ratusz

Budowla w stylu neogotyckim, wybudowana w 1901 roku. Wpisana została na listę zabytków miasta Słupska, ale nadal pełni funkcję siedziby władz miejskich.

Słupski ratusz może poszczycić się nie tylko pięknem budowli, ale również ciekawą historią bursztynowego Niedźwiadka Szczęścia, którego można zobaczyć wewnątrz budynku. Dla turystów możliwe jest także udanie się na wieżę, aby podziwiać panoramę miasta.

6. Miejska Biblioteka Publiczna

STRESZCZENIE

Tematem mojej pracy jest zastosowanie grafów podczas wakacji lub urlopu, ale myślę, że mój referat przekłada się w równym stopniu na każdy inny dzień wolny, jaki zamierzamy spędzić na zwiedzaniu.

Skupiwszy się najpierw na samych grafach oraz ogólnej definicji postanowiłam wdrążyć się w temat nieco głębiej. Dowiedziałam się, że są rożne rodzaje grafów, ale jest ich tak wiele, że zdecydowałam się na przedstawienie tylko kilku z nich. Przykładem jest graf skierowany, którego krawędziami są strzałki wskazujące na kierunek poruszania się. Ma on szczególne zastosowanie przy tworzeniu planów podróży, ponieważ pokazuje jaką drogę należy obrać. Kolejny graf, który przedstawiłam to graf z wagami. Liczby przy jego krawędziach oznaczają tzw. wagi. Są one określeniem odległości, czasu przejścia z punktu A do punktu B lub inną stałą wartością, którą takiemu grafowi przypiszemy. Zastosowanie zależy od tego, co planujemy rozrysować graficznie. Jak polskie przysłowie mówi: potrzeba matką wynalazku.

Właśnie potrzeba stworzenia wycieczki terenowej po Słupsku skłoniła mnie do rozpatrzenia w bardziej szczegółowy sposób dwóch kolejnych grafów.

Pierwszym z nich jest graf Eulera, który mówi nam o tym, że aby jego utworzenie było możliwe, każdy wierzchołek (za wyjątkiem maksymalnie dwóch) powinien posiadać parzysty stopień. Oznacza to, że każdy zaznaczony na kartce, mapie lub innym planie punkt, musi połączyć się krawędziami z pozostałymi, z czego drogi te muszą być parzyste (czyli: 2, 4, 6 itd.). Dzięki temu możliwe będzie stworzenie trasy, której przejście nie będzie łączyło się z poruszaniem się po tej samej drodze (krawędzi) więcej niż jeden raz. Zasada ta nie jest jednak stosowana w kwestii wierzchołków, więc w danym punkcie możemy pojawić się kilka razy.

Euler odkrył to, gdy rozwikłał zagadkę mostów w Królewcu. To właśnie ten matematyk uważany jest za twórcę teorii grafów i tego, który zapoczątkował znaczny rozwój w tej dziedzinie matematyki.

Zgodnie z tematem mojej pracy „Z matematyką na wakacje” przedstawiłam pozytywne aspekty zastosowania grafu Eulera przy planowaniu podróży. Wykazałam, że graf ten może zostać skutecznie wykorzystany, jeśli chcemy, aby to właśnie droga była kluczowym elementem naszej wyprawy. Dlatego graf ten, zarówno w postaci cyklu jak i ścieżki, nadaje się bezsprzecznie na wycieczki w plener.

Zupełnie inaczej ma się sprawa jeśli chodzi o graf Hamiltona. Zasada określająca jego tworzenie mówi nam, że w danym punkcie nie możemy pojawić się więcej niż raz (wyjątkiem jest punkt połączenia przy cyklu Hamiltona). Równocześnie logicznym jest, że nie przechodząc drugi raz przez ten sam wierzchołek, nie przejdziemy znów tej samej drogi. Dlatego uważam, że graf ten ma szczególne znaczenie jeśli planujemy wycieczkę w mieście. Łatwo dostępne mapy, czy to w formie tradycyjnej, czy elektronicznej, dają nam możliwość naniesienia na nie naszych wierzchołków i tam samym stworzenie jakiejś trasy. Jeżeli chcemy, by wycieczka była jak najbardziej efektowna warto użyć zasady grafu Hamiltona, a wtedy każdy krok, który postawimy, będzie prowadził nas w nowe miejsca. Nigdy nie zobaczymy dwa razy tego samego.

Wcielając się w rolę matematycznego przewodnika wykorzystałam zalety grafu Hamiltona i stworzyłam trasę, która nadaje się dla ludzi w różnym wieku i o różnych zainteresowaniach. Mam nadzieję, że mimo iż temat i rodzaj pracy (referat) wydają się być mało związane z matematyką (przecież wakacje są od odpoczynku), to przedstawiłam tę dziedzinę nauki jako ciekawą i wartą większego zainteresowania. Ludzie powinni zdać sobie sprawę w jak wielkim stopniu wykorzystują często nie lubiane „cyferki i obliczenia” nie zdając sobie z tego sprawy.

Bibliografia

1. Zagadnienia dotyczące grafu Eulera:

- http://pl.wikipedia.org/wiki/Graf_eulerowski → definicja podstawowa
- https://www.youtube.com/watch?v=VRcX9Fzu1Jo → tłumaczenie w praktyce
- http://mathworld.wolfram.com/EulerGraph.html → przykłady grafów i ich wyjaśnienie
- http://www.ctl.ua.edu/math103/euler/howcanwe.htm → różnice między ścieżką a cyklem Eulera

2. Zagadnienia dotyczące grafu Hamiltona:

- http://pl.wikipedia.org/wiki/Graf_hamiltonowski → definicja podstawowa
- http://mathworld.wolfram.com/HamiltonianGraph.html → przykłądy grafów Hamiltona
- http://www.ctl.ua.edu/math103/hamilton/analyzin.htm → analiza cyklu Eulera i Hamiltona
- http://www4.ncsu.edu/~uzgeorge/HamiltonCircuits7-19and22.pdf → definicje, zagadnienia i założenia cyklu/ścieżki Hamiltona; szczegółowe wyjaśnienia stwierdzeń takich jak: wierzchołek, krawędź

3. Dane dotyczące Słupska:

- mapa pochodzi ze storny www.google.pl/maps
- infromacje o zabytkach (ich historia, położenie): widomości własne oraz http://www.slupsk.pl/zabytki
- książki o historii Słupska, jego powstawaniu oraz znaczących zmianach pt.: „Słupsk Anno Domini 2010” i „[...] 2011” Tomasz Urbaniak
- zdjęcia pochodzą ze strony https://www.google.pl/imghp?hl=pl&tab=wi&ei=N9LmVLWPKMXCywOJx4DYBQ&ved=0CBEQqi4oAg oraz http://www.slupsk.pl/zabytki

4. Pozostałe:

- zagadka mostów w Królewcu - http://deltaplus.edu.pl/problem-mostow-krolewieckich
- informacje ogóle o grafach - „Wprowadzenie do teorii grafów” R.J. Wilson