Zespół Szkół Informatycznych

ul. Koszalińska 9, 76-200 Słupsk

e-mail: monikaskwarek@interia.pl

tel: (059) 845 60 70

Sofizmaty matematyczne

Joanna Kołodziejska

II klasa Policyjnego Liceum Ogólnokształcącego

Opiekun pracy: Monika Skwarek

WSTĘP

Matematyka jako jedna z dziedzin nauki zawiera również błędne twierdzenia , które nazywamy sofizmatami. We współczesnej dydaktyce sofizmaty to rozumowania zachowujące wszelkie pozory prawdziwości a sprytnie ukryte błędy w efekcie dają sprzeczne stwierdzenia. Zatem sofizmat prowadzi na ogół do fałszywej tezy , która na pozór wydaje się prawdziwa , w rzeczywistości zawiera błąd.

Sofizmat jest popełniony wtedy, gdy:

- któraś z przesłanek jest fałszywa, lub choćby nieakceptowalna;
- podane przesłanki nie wystarczają do uznania wniosku za dostatecznie uzasadniony;
- któraś z przesłanek nieposiada uzasadnienia

Sofizmat to zwodniczy "dowód" matematyczny, pozornie poprawny, lecz faktycznie błędny, zawierający rozmyślnie wprowadzony błąd, na pierwszy rzut oka trudny do wykrycia.

SOFIZMAT JAKO ROZUMOWANIE WĄSKIE ROZUMOWANIE BŁĘDNE I ZARAZEM ZWODNICZE .Sofizmaty są przypadkami argumentacji logicznie niepoprawnej. Sofizmaty (po łacinie fallacia) to rozumowania zwodnicze. Od sofizmatów odróżniano tzw. paralogizmy, przez które rozumiano niepoprawne wnioskowania, w których błąd został popełniony bez złej woli, bez świadomej intencji oszukania kogoś.

HISTORIA SOFIZMATÓW

Sofistami, czyli nauczycielami mądrości, nazywano w starożytnej Grecji uczonych zawodowo trudniących się nauczaniem rozmaitych sztuk i nauk: gramatyki, retoryki, matematyki, fizyki i wielu jeszcze innych. Wybitni sofiści, działający w V w p.n.e. Protagoras, Hippiasz, Gorgiasz i Prodikos byli wybitnymi myślicielami, którzy między innymi zwracali baczną uwagę na rolę słów w procesie dyskusji i argumentacji. O Protagorasie współcześni mu mawiali, że jest człowiekiem, który umie poprawnie używać słów. Prodikos z kolei zasłynął jako badacz synonimów i homonimów. Ich późniejsi naśladowcy nie poszli jednak ich śladami i w miejsce rzetelnych badań nad językiem zajmować się zaczęli sztuką żonglowania słowami, mającą na celu dowiedzenie za wszelką cenę, nawet kosztem logiki i zdrowego rozsądku, słuszności bronionej – często absurdalnej – tezy. Stąd właśnie wzięło się negatywne określenie sofistyki jako posługiwania się fałszywymi argumentami celem udowodnienia nieprawdy, podczas gdy w pierwotnym znaczeniu wyraz ten oznaczał wielki, krytyczny wobec uznanych wartości religijno-moralnych, humanistyczny ruch o nastawieniu demokratycznym, występujący przeciwko ustalonemu porządkowi społecznemu Aten. To negatywne określenie sofistyki pociągnęło za sobą stosowanie nazwy „sofizmat” dla określenia pozornie poprawnego argumentu, zawierającego świadomie zatajone błędy logiczne lub, wyrażając to krócej, dla określenia: świadomego dowodzenia fałszywej tezy.

Sofistykę niekiedy utożsamia się z erystyką – sztuką prowadzenia sporów. Niekiedy sofizmaty utożsamiano z erystycznymi sposobami przekonywania, wtedy termin „sofistyka” stał się synonimem terminu „erystyka”

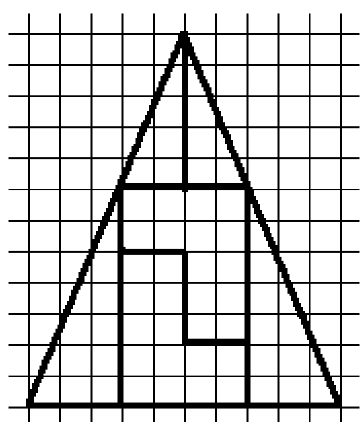
STANDARDOWE UJĘCIE SOFIZMATÓW

Arystoteles, O dowodach sofistycznych.Pewne rozumowania są sylogizmami, a inne nimi nie są, mimo iż się takimi wydają.Koncepcja sofizmatu, opracowana przez Arystotelesa w dziele O dowodach sofistycznych, oddziałała na ukształtowanie współczesnych „teorii sofizmatów”.

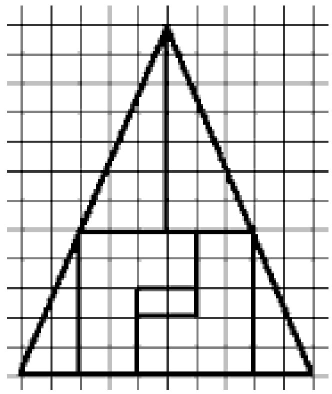
SOFIZMATY GEOMETRYCZNE

- 58 = 60 = 59

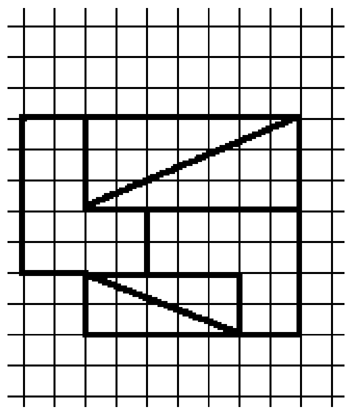
Trójkąt równoramienny o podstawie 10 cm oraz wysokości 12 cm dzielimy na sześć części, tak jak przedstawiono na powyższym rysunku. Pole powierzchni tego trójkąta (a także suma powierzchni sześciu części) wynosi 60 cm^2 .



Z tych sześciu części da się złożyć identyczny trójkąt, z tą różnicą, że w jego środku pojawi się… dziura o powierzchni dwóch centymetrów kwadratowych (rysunek poniżej). Ale to oznacza, że suma powierzchni wszystkich sześciu części wynosi 60 – 2 = 58 cm^2



Nie dość na tym – z tych samych sześciu części można ułożyć figurę o powierzchni 59 cm ^{2}.



WYJAŚNIENIE

Pierwszy rysunek sugeruje, że trójkąt składa się z dwóch wielokątów w kształcie litery L (o całkowitych długościach wszystkich boków), dwóch większych trójkątów prostokątnych 3×7 oraz dwóch mniejszych trójkątnych prostokątnych 2×5. Tak naprawdę jednak, większe trójkąty prostokątne musiałyby mieć wysokość 7,2 cm, a mniejsze „trójkąty" – być trapezami bardzo małej górnej podstawie (lub należałoby powiększyć nieco figury w kształcie litery L). Analogiczny błąd można popełnić patrząc na drugi rysunek. Jeśli brzegi figur narysuje się grubą linią lub wytnie się je niestarannie, można nie zauważyć niewielkich niedokładności, które jednak razem dają nawet centymetrowe błędy przy wyliczaniu pola powierzchni. Sofizmat wymyślił nowojorski psychiatra L. Vosburgh Lyons.

- Czy to możliwe, że 1=2 i 2=3?

2=2	6= 6
3-1=4-6	10-4=15-9
1-3=4-6	4-10=9-15

$1-3+9/4=4-6+9/4$ $4-10+25/4=9-15+25/4$

$(1-3/2)^2=(2-3/2)^2$ $(2-5/2)^2=(3-5/2)^2$

$1-3/2=2-3/2$ $2-5/2=3-5/2$

$1=2$ $2=3$

Wyjaśnienie:

Błąd polega na obustronnym pierwiastkowaniu równania. Po tej czynności należy uwzględnić wartość pierwiastka kwadratowego z liczby dodatniej a.

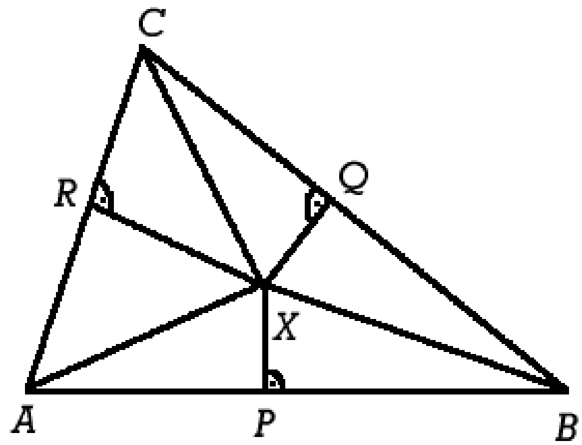
- wszystkie okręgi mają ten sam obwód

Weźmy dwa dowolne różne okręgi. Umieśćmy mniejszy z nich wewnątrz większego w taki sposób, by ich środki pokryły się (patrz rysunek poniżej). Potoczmy większy z okręgów po linii prostej. Po wykonaniu pojedynczego obrotu okrąg przemieści się na odległość równą swojemu obwodowi (czarny odcinek na rysunku). Tymczasem, jak nietrudno zauważyć, mniejszy z okręgów podczas jednego obrotu zatoczy linię o identycznej długości (czarny cieńszy odcinek – jak widać jest on równy co do długości odcinkowi, po którym przemieścił się większy okrąg). Zatem mniejszy okrąg ma taki sam obwód jak okrąg o większym promieniu!

WYJAŚNIENIE

Rzeczywiście mniejszy okrąg wykonuje pojedynczy obrót. Jednak okrąg ten równocześnie dodatkowo porusza się („ślizga się”) w prawo. To, że można przetoczyć złotówkę po całym pokoju (równocześnie powoli obracając ją i szybko przesuwając po podłodze) nie znaczy, że moneta ma obwód o długości kilku metrów!

- wszystkie trójkąty są równoboczne



Rozważmy dowolny trójkąt ABC: niech X będzie punktem przecięcia symetralnej boku AB oraz dwusiecznej kąta BCA. Z punktu X poprowadźmy proste XR i XQ prostopadłe odpowiednio do boków AC i BC.

Po pierwsze, trójkąty CRX i CQX są przystające, bo:

- CX jest wspólnym bokiem trójkątów,
- kąt RCX = kąt QCX (bo CX jest dwusieczną kąta BCA),
- kąt XRC = kąt XQC = kąt prosty.

Zatem odcinki RC i QC oraz RX i XQ są tej samej długości.

Po drugie, trójkąty AXR i BXQ są przystające, bo:

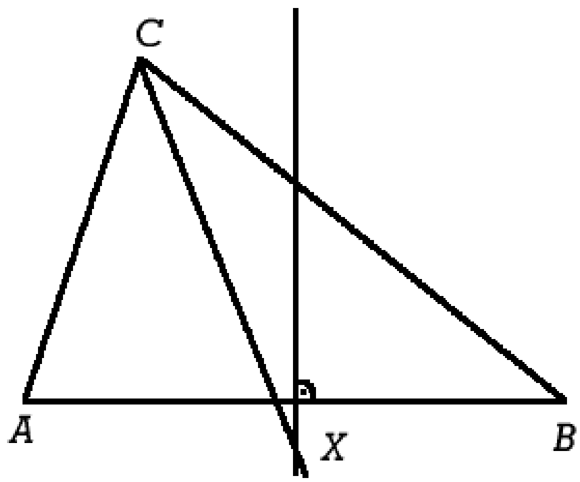
- jak wyżej stwierdziliśmy, RX i XQ są tej samej długości,
- odcinki AX i BX są tej samej długości (prosta XP jest symetralną AB),
- kąt XRA = kąt XQB = kąt prosty.

Odcinki AR i BQ są więc tej samej długości.

Udowodniliśmy więc, że RC = QC i AR = BQ, zatem: AC = AR + RC = BQ + QC = BC, tzn. odcinki AC i BC mają taką samą długość, zatem trójkąt ABC jest równoramienny. Wykreślając symetralną do boku AC i dwusieczną kąta CBA, i przeprowadzając rozumowanie analogiczne do powyższego łatwo przekonamy się, że także odcinki AB i CB mają taką samą długość, a więc trójkąt ABC jest nie tylko równoramienny, ale także równoboczny!

WYJAŚNIENIE :

Jeden jedyny błąd w dowodzie polega na przyjęciu, że punkt X leży wewnątrz trójkąta ABC: w rzeczywistości znajduje się on na zewnątrz tego trójkąta - patrz rysunek poniżej.



SOFIZMATY ALGEBRAICZNE

- **Każda liczba jest równa dowolnej liczbie od niej mniejszej**

Jeśli liczba a jest większa od liczby b, to istnieje pewna liczba c, taka że a = b + c. Na przykład dla liczb 5 i 3 mamy: 5 = 3+2. Mamy zatem:

$$a = b+c$$

Mnożymy obie strony równania przez a-b

$$a(a-b) = (b+c)(a-b)$$

$$a^2-ab = ab+ac-b^2-bc$$

Składnik ac przenosimy na lewą stronę:

$$a^2-ab-ac = ab-b^2-bc$$

$$a(a-b-c) = b(a-b-c)$$

Dzielimy obie strony przez a-b-c i dostajemy: $a = b$.

WYJAŚNIENIE :

Stron równania nie można dzielić przez zero - przecież z tego, że 1 razy 0 równa się 2 razy 0, nie wynika, że 1 = 2! W powyższym sofizmacie w ostatnim kroku dzieliliśmy strony równania przez czynnik a-b-c, który jest równy zero (bo a = b + c).

- **za czasów Mieszka I żyło ponad bilion ludzi**

Każdy z nas ma dwoje rodziców (biologicznych), czworo dziadków, ośmioro pradziadków, 16 prapradziadków itd. - z każdym pokoleniem wstecz liczba przodków podwaja się, tzn. n pokoleń temu mieliśmy 2n przodków. Ilu spośród Twoich przodków żyło za czasów Mieszka I? Było to 1000 lat temu, a zatem - jeśli przyjąć, że jedno pokolenie odpowiada 25 latom - 40 generacji przeminęło od czasów pierwszego polskiego władcy. Zatem odpowiedź to 240 ludzi (dla uproszczenia bierzemy pod uwagę tylko przodków z jednego pokolenia). Nietrudno wyliczyć, że 240 = 1.099.511.627.776, czyli ponad bilion (= 1.000 miliardów!). Wniosek jest zdumiewający: tysiąc lat temu żyło wiele miliardów ludzi, a przecież nie wzięliśmy jeszcze pod uwagę ludzi, którzy nie byli Twoimi przodkami!

WYJAŚNIENIE :

Błąd polega na tym, że te same osoby zliczamy wielokrotnie. Ten sam człowiek może być przecież naszym przodkiem zarówno po kądzieli, jak i po mieczu, może wręcz pojawiać się wielokrotnie w różnych miejscach naszego drzewa genealogicznego - im dalej sięgamy w przeszłość tym jest to bardziej prawdopodobne!

- problem Serbelloni

Spośród trzech więźniów, Mateusza, Marka i Łukasza, dwóch ma być straconych, a jeden ocalony. Mateusz nie wie jeszcze, którzy z więźniów zostali skazani na śmierć, i czy on sam jest jednym z tych dwóch nieszczęśników. Pyta się on strażnika: "na pewno zginie Marek lub Łukasz, więc, jeśli wyjawisz mi teraz, kto z nich zostanie stracony, to niczego mi nie powiesz o moim losie". Strażnik po krótkim namyśle przychylił się do prośby więźnia i odpowiedział, że umrze Marek. Usłyszawszy to, Mateusz uspokoił się nieco, bowiem prawdopodobieństwo jego ocalenia zwiększyło się z 1/3 do 1/2. (Mateusz wie teraz, że zostanie stracony Marek, a drugim nieszczęśnikiem będzie albo on, albo Łukasz.)

Czy rzeczywiście Mateusz miał prawo poczuć się spokojniejszym?

WYJAŚNIENIE :

Niestety nie. Prawdopodobieństwo ocalenia Mateusza pozostaje równe 1/3, także po tym, co Mateusz usłyszał z ust strażnika. Zestawmy w tabeli wszystkie możliwe pary więźniów skazanych na śmierć:

prawdopodobieństwo	skazani na śmierć	ocalony	imię wyjawiane przez strażnika
A	1/3	Mateusz, Marek	Łukasz, Marek
B	1/3	Mateusz, Łukasz	Marek, Łukasz
C	1/3	Marek, Łukasz, Mateusz	Marek albo Łukasz

Zauważmy, że w trzecim przypadku strażnik może podać Mateuszowi imię albo Marka, albo Łukasza. Przyjmijmy, że w takiej sytuacji strażnik losowo wybiera skazańca, którego imię oznajmi Mateuszowi. Zamiast trzech mamy zatem do czynienia z czterema możliwościami:

prawdopodobieństwo	skazani na śmierć	ocalony	imię wyjawiane przez strażnika
A	1/3	Mateusz, Marek	Łukasz, Marek
B	1/3	Mateusz, Łukasz	Marek, Łukasz
C_1	½ * 1/3 = 1/6	Marek, Łukasz, Mateusz	Marek
C_2	½ * 1/3 = 1/6	Marek, Łukasz, Mateusz	Łukasz

Pod uwagę bierzemy jedynie te przypadki, w których strażnik wyjawia Mateuszowi, że Marek zostanie stracony, czyli:

prawdopodobieństwo	skazani na śmierć	ocalony	imię wyjawiane przez strażnika
A	2/3	Mateusz, Marek	Łukasz, Marek
C_1	1/3	Mateusz, Łukasz Mateusz	Marek

W porównaniu z poprzednią tabelą zmieniły się wartości prawdopodobieństw, bo teraz liczymy je w przestrzeni dwóch przypadków, a nie czterech, tak czy owak przypadek A pozostaje dwa razy bardziej prawdopodobny niż przypadek C_1.

Teraz widać, że prawdopodobieństwo, że Mateusz umrze, pozostaje równe 1/3. Jeśli Czytelnik nie wierzy w te rachunki, może przeprowadzić prosty eksperyment. Niech jedna osoba wybiera losowo dwie karty spośród trzech, asa, króla i damy, w taki sposób, by druga osoba na razie nie wiedziała, które karty zostały wylosowane. Następnie niech pierwsza osoba wyjawi jakąś z wylosowanych kart, nie będącą asem. Proszę sprawdzić w jakim procencie takich losowań, gdy pierwsza osoba powiedziała, że wylosowany został król, drugą wylosowaną kartą był as. (As reprezentuje Mateusza, król Marka, a dama - Łukasza.)

Wracając jeszcze do trzech więźniów: odpowiedź byłaby inna, gdyby wiadomo było, że strażnik w przypadku, gdy zostaną straceni Marek i Łukasz, wyjawia imię Marka, a nie losowo wybranego więźnia. Wtedy powiem prawdopodobieństwa wszystkich przypadków mają się jak następuje:

prawdopodobieństwo	skazani na śmierć	ocalony	imię wyjawiane przez strażnika
A	1/3	Mateusz, Marek	Łukasz, Marek
B	1/3	Mateusz, Łukasz	Marek, Łukasz
C_1	1/3	Marek, Łukasz, Mateusz	Marek
C_2	0	Marek, Łukasz, Mateusz	Łukasz

W sytuacji, gdy strażnik powiedział, że stracony zostanie Marek, prawdopodobieństwo ocalenia Mateusza jest równe prawdopodobieństwu ocalenia Łukasza i wynosi 1/2. Gdyby natomiast strażnik powiedział, że to Łukasz został skazany na śmierć, wówczas Mateusz wiedziałby na pewno, że jest drugim skazańcem.

Problem zyskał swoją nazwę, ponieważ omal nie doprowadził do zerwania odbywającej się w Villi Serbelloni w lecie 1966 konferencji, poświęconej biologii teoretycznej.

<u>Podsumowanie</u>

Sofizmaty możemy spotkać w każdym dziale matematycznym i nie tylko. Są one również w naszym codziennym życiu , w naszych błędnych przekonaniach. Najczęściej spotykane były w latach wcześniejszych . Ludzie wierzyli w przekonania filozofów ponieważ było to dla nich bezpieczną przystanią w tak wielkim świecie . W mojej pracy przedstawiłam pokrótce według mnie najważniejsze występowanie sofizmatów w geometrii algebrze i w życiu codziennym. Można by było długo się zagłębiać w definicję sofizmatów podając wiele przykładów. Jednakże popełnianie bledów i utwierdzanie się w nich leży w naturze człowieka ponieważ świat jest nieskończenie wielki a nasz wiedza na jego temat jest bardzo ograniczona. Wierzymy w to co nam powiedziano by czuć się bezpiecznie lecz prawdy na nasze wszystkie pytania nikt tak na prawdę nie zna. Można by stwierdzić że nasze życie to jeden wielki sofizmat .

Streszczenie

Tematem mojej pracy są sofizmaty matematyczne polegające na udowodnieniu po pełnionego błędu w zadaniu na pozór prawidłowym.

Skupiając się na definicji sofizmatu postanowiłam poprzeć ją różnymi przykładami nie tylko suchej matematyki ale i przykładami z życia codziennego. Wzbogaciło to moją wiedzę i poparło ogólną definicję sofizmatów. Pierwszym przykładem typowego sofizmatu z działu geometrycznego był trójkąt równoramienny podzielony na sześć części , które ułożone w trzech różnych pozycjach w zadziwiający sposób dają nam trzy różne pola. Błąd polegał na tym że błąd można popełnić patrząc na drugi rysunek. Jeśli brzegi figur narysuje się grubą linią lub wytnie się je niestarannie, można nie zauważyć niewielkich niedokładności, które jednak razem dają nawet centymetrowe błędy przy wyliczaniu pola powierzchni. Sofizmat wymyślił nowojorski psychiatra L. Vosburgh Lyons. Kolejnym przykładem błędnego sofizmatu tym razem arytmetycznego można przedstawić na przykładzie przyrównania dwóch liczb. Jeśli liczba a jest większa od liczby b, to istnieje pewna liczba c, taka że a = b + c. Błąd w tego typu zadaniu polegał na tym że stron równania nie można dzielić przez zero - przecież z tego, że 1 razy 0 równa się 2 razy 0, nie wynika, że 1 = 2! Ostatnim przykładem opierającym się na po parciu definicji sofizmatu jest przykład z życia codziennego.Za czasów Mieszka I można by było stwierdzić że żyło ponad bilion ludzi. Jednak w tego typu przykładzie nie uwzględniono jednego dość istotnego szczegółu a mianowicie błąd polega na tym, że te same osoby zliczamy wielokrotnie. Ten sam człowiek może wręcz pojawiać się wielokrotnie w różnych miejscach naszego drzewa genealogicznego - im dalej sięgamy w przeszłość tym jest to bardziej prawdopodobne!

Zgodnie z tematem mojej pracy sofizmaty matematyczne przedstawiłam jak mały błąd może zaburzyć całą koncepcję na pozór poprawnego zadania i nie tylko zadania ponieważ i w naszym życiu trafia się masa różnych przypadków ,które uważamy za prawdziwe a w rzeczywistości wcale takie nie są.

Według wielu ludzi matematyka jest dziedziną doskonała w ,której nie mają miejsca jakiekolwiek błędy a jednak ich twierdzenie jest mylne. Za sprawą sofizmatów możemy się przekonać ,że tak na prawdę wszystko na co byśmy nie spojrzeli może zawierać błąd ,który na pierwszy rzut oka jest bardzo ciężki do zauważenia i wykrycia przez najwybitniejszych speców tejże dziedziny.

Bibliografia

1.Wstep :

http://argumentacja.pdg.pl/b3/argdiap20.6.9_mk.pdf ----> wstęp

https://pl.wikipedia.org/wiki/Sofizmat ----> wstęp

2.Historia :

https://pl.wikipedia.org/wiki/Sofizmat ----> historia

http://argumentacja.pdg.pl/b3/argdiap20.6.9_mk.pdf ----> standardowe ujecie sofizmatu

3.Sofizmaty geometryczne :

http://www.ceti.pl/gralinski/archiwumfi/6ct.htm -----> zadanie z trójkątem

http://www.ceti.pl/gralinski/archiwumfi/okregi.htm----> wszystkie okręgi mają ten sam obwód

http://www.ceti.pl/gralinski/archiwumfi/trojrown.htm-----> wszystkie trójkąty są równoboczne

4.Sofizmaty algebraiczne

http://www.ceti.pl/gralinski/archiwumfi/lrm.htm----> zadanie a = b+c

http://www.ceti.pl/gralinski/archiwumfi/pra.htm----> za czasów Mieszka I żyło ponad bilion ludzi

http://www.ceti.pl/gralinski/archiwumfi/serbelloni.htm-----> problem Serbelloni